La théorie du choix social
—
une brève présentation . . .

Thierry Champion

Laboratoire IMATH (Institut de Mathématiques de Toulon et du Var),

Université de Toulon

Bibliographie

un livre :

MAJORITY JUDGEMENT, *Measuring, Ranking, and Electing,*
Michel Balinski and Rida Laraki,
MIT Press.

un article de recherche :

A theory of measuring, electing and ranking,
Michel Balinski and Rida Laraki,
Proceedings of the National Academy of Sciences USA, vol. 104, no. 21, 8720-8725.

. . . et quelques discussions avec Rida Laraki à Paris, Pau, Montpellier, Santiago du Chili . . .

Introduction

définition par Balinski et Laraki :

> *"The Theory of Social Choice concerns methods for amalgamating the appreciations or evaluations of many individuals into one collective appreciation or evaluation."*

Introduction

définition par Balinski et Laraki :

> *"The Theory of Social Choice concerns methods for amalgamating the appreciations or evaluations of many individuals into one collective appreciation or evaluation."*

Applications : décisions ou elections politiques, classement de "candidats" par un jury . . .

Introduction

définition par Balinski et Laraki :

> *"The Theory of Social Choice concerns methods for amalgamating the appreciations or evaluations of many individuals into one collective appreciation or evaluation."*

Applications : décisions ou elections politiques, classement de "candidats" par un jury ...

Travaux et résultats célèbres par :

- Jean-Charles, chevalier de Borda (1733-1799)
- Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat, marquis de Condorcet (1743-1793)
- Kenneth Arrow (1921-) : le théorème d'impossibilité d'Arrow

Introduction - premier exemple

deux systèmes de vote pour l'élection des députés :

- système français : majorité à deux tours;
- système américain : majorité à un tour.

Introduction - premier exemple

deux systèmes de vote pour l'élection des députés :

- système français : majorité à deux tours;
- système américain : majorité à un tour.

Exemple :

nombre de votants	préférences
1	$Ananas > Banane > Cerise$
7	$Ananas > Cerise > Banane$
7	$Banane > Cerise > Ananas$
6	$Cerise > Banane > Ananas$

…Quel fruit gagne ?

Le gagnant de Condorcet

Définition : le **gagnant de Condorcet**, si il existe, est le candidat qui gagne contre tous les autres en *“un contre un”*.

Le gagnant de Condorcet

Définition : le **gagnant de Condorcet**, si il existe, est le candidat qui gagne contre tous les autres en *“un contre un”*.

Exemple:

nombre de votants	préférences
1	$Ananas > Banane > Cerise$
7	$Ananas > Cerise > Banane$
7	$Banane > Cerise > Ananas$
6	$Cerise > Banane > Ananas$

. . . Quel fruit est le gagnant de Condorcet ?

Le paradoxe de Condorcet

Un autre exemple, par Condorcet lui-même :

nombre de votants	préférences
23	*Pticachou* $>$ *Bulzibar* $>$ *Cartapuce*
2	*Bulzibar* $>$ *Pticachou* $>$ *Cartapuce*
17	*Bulzibar* $>$ *Cartapuce* $>$ *Pticachou*
10	*Cartapuce* $>$ *Pticachou* $>$ *Bulzibar*
8	*Cartapuce* $>$ *Bulzibar* $>$ *Pticachou*

. . . y a-t-il un gagnant de Condorcet ?

La méthode de Borda

Définition : *On suppose qu'il y a k candidats. Chaque votant classe les candidats, et donne k points au candidat qu'il classe premier, $k-1$ points à celui qu'il classe deuxième, $\ldots$, 1 point à celui qu'il classe dernier. Le score d'un candidat est celui obtenu en additionnant tous les points qu'il reçoit :*

$$\sum_{n=1}^{k} n\,x_n \quad = \quad x_1 + 2\,x_2 + \ldots + (k-1)\,x_{k-1} + k\,x_k$$

où x_n représente le nombre de fois où le candidat reçoit n points. Le **gagnant de Borda** *est le candidat qui a le plus de points.*

La méthode de Borda

Exemple:

nombre de votants	préférences
1	*Ananas* $>$ *Banane* $>$ *Cerise*
7	*Ananas* $>$ *Cerise* $>$ *Banane*
7	*Banane* $>$ *Cerise* $>$ *Ananas*
6	*Cerise* $>$ *Banane* $>$ *Ananas*

La méthode de Borda

Exemple:

nombre de votants	préférences
23	*Pticachou* $>$ *Bulzibar* $>$ *Cartapuce*
2	*Bulzibar* $>$ *Pticachou* $>$ *Cartapuce*
17	*Bulzibar* $>$ *Cartapuce* $>$ *Pticachou*
10	*Cartapuce* $>$ *Pticachou* $>$ *Bulzibar*
8	*Cartapuce* $>$ *Bulzibar* $>$ *Pticachou*

Un autre paradoxe de Condorcet

un exemple par Condorcet :

votants	2	4	5	29	3	3	2	32	6	5	4	5
premier choix	A	A	A	A	A	A	B	B	B	C	C	C
second choix	B	B	C	C	D	D	A	C	D	A	B	B
troisième choix	C	D	B	D	B	C	D	D	A	B	A	D
dernier choix	D	C	D	B	C	B	C	A	C	D	D	A

Un autre paradoxe de Condorcet

un exemple par Condorcet :

votants	2	4	5	29	3	3	2	32	6	5	4	5
premier choix	A	A	A	A	A	A	B	B	B	C	C	C
second choix	B	B	C	C	D	D	A	C	D	A	B	B
troisième choix	C	D	B	D	B	C	D	D	A	B	A	D
dernier choix	D	C	D	B	C	B	C	A	C	D	D	A

Le gagnant de Borda est C alors que le gagnant de Condorcet est A !!

Un autre paradoxe de Condorcet

un exemple par Condorcet :

votants	2	4	5	29	3	3	2	32	6	5	4	5
premier choix	A	A	A	A	A	A	B	B	B	C	C	C
second choix	B	B	C	C	D	D	A	C	D	A	B	B
troisième choix	C	D	B	D	B	C	D	D	A	B	A	D
dernier choix	D	C	D	B	C	B	C	A	C	D	D	A

Le gagnant de Borda est C alors que le gagnant de Condorcet est A !!

Si D abandonne, le gagnant de Borda est A !!!

Théorème d'impossibilité d'Arrow : le cadre

Kenneth Arrow (1921-) :

Social choice and individual values,
K. Arrow, *Yale University Press, 1951*

Théorème d'impossibilité d'Arrow : le cadre

Kenneth Arrow (1921-) :

Social choice and individual values,
K. Arrow, *Yale University Press, 1951*

Données : chaque votant v possède un ordre de préférences **strictes** :

$$B >_v A >_v C$$

La collection de ces votes forme un **profil de préférences.**

Théorème d'impossibilité d'Arrow : le cadre

Kenneth Arrow (1921-) :

Social choice and individual values,
K. Arrow, *Yale University Press, 1951*

Données : chaque votant v possède un ordre de préférences **strictes** :

$$B >_v A >_v C$$

La collection de ces votes forme un **profil de préférences.**

Objectif : mettre au point une **fonction de classement** ou *classement social* :

$$B >_S A >_S C$$

Théorème d'impossibilité d'Arrow : le cadre

Hypothèses

- **Universalité :** la fonction de classement doit être définie pour tous les profils.

Théorème d'impossibilité d'Arrow : le cadre

Hypothèses

- **Universalité :** la fonction de classement doit être définie pour tous les profils.
- **Unanimité :** si $A >_v B$ pour tous les votants, alors $A >_S B$.

Théorème d'impossibilité d'Arrow : le cadre

Hypothèses

- **Universalité :** la fonction de classement doit être définie pour tous les profils.
- **Unanimité :** si $A >_v B$ pour tous les votants, alors $A >_S B$.
- **Indépendance aux alternatives non pertinentes (IIA) :** le fait que $A >_S B$ ne dépend que du classement relatif de A et B pour les votants.

Théorème d'impossibilité d'Arrow : le cadre

Hypothèses

- **Universalité :** la fonction de classement doit être définie pour tous les profils.
- **Unanimité :** si $A >_v B$ pour tous les votants, alors $A >_S B$.
- **Indépendance aux alternatives non pertinentes (IIA) :** le fait que $A >_S B$ ne dépend que du classement relatif de A et B pour les votants.
- **Absence de dictateur :** la fonction de vote n'est pas déterminée par les préférences de l'un des votants.

Exemples - méthode de Condorcet

nombre de votants	préférences
23	*Pticachou* $>$ *Bulzibar* $>$ *Cartapuce*
2	*Bulzibar* $>$ *Pticachou* $>$ *Cartapuce*
17	*Bulzibar* $>$ *Cartapuce* $>$ *Pticachou*
10	*Cartapuce* $>$ *Pticachou* $>$ *Bulzibar*
8	*Cartapuce* $>$ *Bulzibar* $>$ *Pticachou*

méthode de Condorcet :
Ptitcachou $>_S$ *Bulzibar* $>_S$ *Cartapuce* $>_S$ *Pticachou*

Exemples - méthode de Condorcet

nombre de votants	préférences
23	*Pticachou* $>$ *Bulzibar* $>$ *Cartapuce*
2	*Bulzibar* $>$ *Pticachou* $>$ *Cartapuce*
17	*Bulzibar* $>$ *Cartapuce* $>$ *Pticachou*
10	*Cartapuce* $>$ *Pticachou* $>$ *Bulzibar*
8	*Cartapuce* $>$ *Bulzibar* $>$ *Pticachou*

méthode de Condorcet :
Ptitcachou $>_S$ *Bulzibar* $>_S$ *Cartapuce* $>_S$ *Pticachou*

La méthode de Condorcet ne satisfait pas *l'Universalité*.

Exemples - méthode de Bordat

number	2	4	5	29	3	3	2	32	6	5	4	5
rank 1	A	A	A	A	A	A	B	B	B	C	C	C
rank 2	B	B	C	C	D	D	A	C	D	A	B	B
rank 3	C	D	B	D	B	C	D	D	A	B	A	D
rank 4	D	C	D	B	C	B	C	A	C	D	D	A

méthode de Condorcet : $A >_S C >_S B >_S D$

méthode de Borda : $C >_S B >_S A >_S D$

Exemples - méthode de Bordat

number	2	4	5	29	3	3	2	32	6	5	4	5
rank 1	A	A	A	A	A	A	B	B	B	C	C	C
rank 2	B	B	C	C	D	D	A	C	D	A	B	B
rank 3	C	D	B	D	B	C	D	D	A	B	A	D
rank 4	D	C	D	B	C	B	C	A	C	D	D	A

méthode de Condorcet : $A >_S C >_S B >_S D$

méthode de Borda : $C >_S B >_S A >_S D$

si D abandonne : la méthode de Borda donne :
$A >_S B >_S C$

Exemples - méthode de Bordat

number	2	4	5	29	3	3	2	32	6	5	4	5
rank 1	A	A	A	A	A	A	B	B	B	C	C	C
rank 2	B	B	C	C	D	D	A	C	D	A	B	B
rank 3	C	D	B	D	B	C	D	D	A	B	A	D
rank 4	D	C	D	B	C	B	C	A	C	D	D	A

méthode de Condorcet : $A >_S C >_S B >_S D$

méthode de Borda : $C >_S B >_S A >_S D$

si D abandonne : la méthode de Borda donne :
$A >_S B >_S C$

La méthode de Borda ne vérifie pas *l'Indépendance aux alternatives non pertinentes (IIA).*

Le théorème d'impossibilité d'Arrow

Théorème (Théorème d'impossibilité d'Arrow)

Dès qu'il y a au moins 3 *candidats et* 2 *votants, il n'existe pas de méthode de classement qui satisfait les principes suivants :*

- *Universalité,*
- *Unanimité,*
- *Indépendance aux alternatives non pertinentes,*
- *Etre non dictatorial.*

Preuve par Geanakoplos (2005)

On suppose qu'une fonction de classement vérifie

- Universalité,
- Unanimité,
- Indépendance aux alternatives non pertinentes,

alors elle est dictatoriale.

Preuve par Geanakoplos (2005)

On suppose qu'une fonction de classement vérifie

- Universalité,
- Unanimité,
- Indépendance aux alternatives non pertinentes,

alors elle est dictatoriale.

Etape 1

On considère un profil de préférence. Si un candidat B est soit premier soit dernier pour tous les votants, alors il en est de même pour le classement social.

Preuve par l'absurde !

Preuve par Geanakoplos (2005)

Etape 2

Il existe un profil Φ, un votant d et un candidat B, pour lesquels le classement social classe B dernier, mais en changeant uniquement son vote d peut faire passer B en premier.

Preuve par Geanakoplos (2005)

Etape 2

Il existe un profil Φ, un votant d et un candidat B, pour lesquels le classement social classe B dernier, mais en changeant uniquement son vote d peut faire passer B en premier.

Etape 3

Le votant d impose sa préférence entre les choix A et C à la fonction de classement pour tous les candidats A et C differents de B :

$$A >_d C \quad \Rightarrow \quad A >_S C$$

Preuve par Geanakoplos (2005)

Etape 2

Il existe un profil Φ, un votant d et un candidat B, pour lesquels le classement social classe B dernier, mais en changeant uniquement son vote d peut faire passer B en premier.

Etape 3

Le votant d impose sa préférence entre les choix A et C à la fonction de classement pour tous les candidats A et C differents de B :

$$A >_d C \quad \Rightarrow \quad A >_S C$$

Etape 4

Le votant d impose sa préférence entre A et B à la fonction de classement pour tout candidat A.

Monotonie

Exemple:

4	28	38	14	16
A	A	B	C	C
B	C	C	B	A
C	B	A	A	B

Qui est élu (dans le système majoritaire à deux tours) ?

Monotonie

Exemple:

4	28	38	14	16
A	A	B	C	C
B	C	C	B	A
C	B	A	A	B

Qui est élu (dans le système majoritaire à deux tours) ?

Presque pareil :

4	28	38	14	16
B	A	B	C	C
A	C	C	B	A
C	B	A	A	B

Qui est élu ?